I. ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE.

Définition :

Une **équation** est une égalité de deux expressions littérales appelés les **membres** de l'équation.
Une équation est dite **du premier degré à une inconnue x** lorsqu'elle peut s'écrire sous la forme :

$ax+b=cx+d$ → $ax+b$ est le premier membre, $cx+d$ est le second membre.

(a, b, c, d, désignant des nombres avec $a \neq c$)

Exemple : Soit l'équation est dite du premier degré : $5x-6=4+3x$

Résoudre une équation, c'est trouver la valeur de l'inconnue *x* qui rend l'égalité vraie.
Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs numériques que l'on peut donner à x pour que l'égalité soit vraie. Ces valeurs sont appelées les **solutions de l'équation**.

Equations de référence :

- L'équation $a+x=b$ a pour solution x = b – a ;
- Si a ≠ 0, l'équation $a \times x = b$ a pour solution $x = \dfrac{b}{a}$

Exemple :

$x+6=11$	on retranche 6 aux deux membres
$x+6-6=11-6$	on calcule
$x=5$	

Exemple :

$8x = 32$	on divise par 8 les deux membres
$\dfrac{8x}{8}=\dfrac{32}{8}$	on calcule
$x=4$	

Propriétés :

Si on ajoute ou si on soustrait un même nombre ou une même expression aux deux membres d'une équation du premier degré, on obtient une nouvelle équation qui a les mêmes solutions que l'équation initiale.
Si on multiplie ou si on divise un même nombre non nul ou une même expression non nulle les deux membres d'une équation du premier degré, on obtient une nouvelle équation qui a les mêmes solutions que l'équation initiale.

Une équation ne change pas si l'on ajoute, si l'on soustrait, si l'on multiplie ou si l'on divise les deux membres de l'équation par un même nombre non nul.

Ainsi, pour toutes expressions littérales A et B, si on considère $k \neq 0$, on a :

Si $A=B$, alors : $A+k=B+k$, $A-k=B-k$, $A\times k=B\times k$, $\dfrac{A}{k}=\dfrac{B}{k}$

Exemple : Résoudre l'équation :

5x – 6 = 4 + 3x

On va d'abord **regrouper les constantes dans un seul membre** : (si a = b, alors a+6 = b+6)

5x – 6 **+ 6** = 4 + 3x **+ 6**

5x = 3x + 10

On va ensuite **regrouper les inconnues dans l'autre membre** : (si a = b, alors a-3x = b-3x)

5x **– 3x** = 3x + 10 **– 3x**

2x = 10

On divise par « le nombre de x » pour « **isoler x** » :

$$\frac{2x}{2}=\frac{10}{2}$$

x = 5

La solution de l'équation $5x-6=4+3x$ est 5

***Preuve* :**

Si x = 5, on a :

$5\mathbf{x} - 6 = 5 \times \mathbf{5} - 6 = 25 - 6 = \mathbf{19}$

$4 + 3\mathbf{x} = 4 + 3 \times \mathbf{5} = 4 + 15 = \mathbf{19}$

II. EQUATIONS « PRODUIT NUL ».

1) Produit nul :

Propriétés :

Si au moins un des facteurs d'un produit est nul, alors ce produit de facteurs est nul.

Si $A=0$ ou si $B=0$, alors $A\times B=0$.

Si un produit de facteurs est nul, alors au moins un de ses facteurs est nul.

Si $A\times B=0$, alors $A=0$ ou $B=0$

2) Equations $(ax+b)(cx+d)=0$:

Propriétés :

Soit a, b, c, d quatre nombres.

Les solutions de l'équation « produit nul » $(ax+b)(cx+d)=0$ sont les nombres x tels que :

$(ax+b)=0$ **ou** $(cx+d)=0$

Exemple : Résoudre l'équation : $(2x-8)(3x+4)=0$

Les solutions sont les nombres x tels que :

$2x-8=0$ ou $3x+4=0$

$2x=8$ ou $3x=-4$

$x=4$ ou $x=-\dfrac{4}{3}$

Exemple : Résoudre les équations :

a) $(5x+15)(4-6x)=0$

soit : $5x+15=0$, soit : $4-6x=0$

soit : $5x=-15$, soit : $-6x=-4$

soit : $x=\dfrac{-15}{5}$, soit : $x=\dfrac{-4}{-6}$

soit : $x=-3$, soit : $x=\dfrac{2}{3}$

b) $(x-1)^2=(3-2x)^2$

$(x-1)^2-(3-2x)^2=0$

$[(x-1)+(3-2x)][(x-1)-(3-2x)]=0$

$[x-1+3-2x][x-1-3+2x]=0$

$(-x+2)(3x-4)=0$ → *Equation-produit*

c) $12=3x^2$

$12-3x^2=0$

$3\times4-3x^2=0$

$3\times(4-x^2)=0$

$4-x^2=0$

$2^2-x^2=0$

$(2+x)(2-x)=0$

→ *Equation-produit*

d) $3x(x+2)+(x+2)(1-5x)=0$

$(x+2)[3x+(1-5x)]=0$

$(x+2)[3x+1-5x]=0$

$(x+2)(-2x+1)=0$

→ *Equation-produit*

III. INEQUATIONS DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE.

1) Vocabulaire :

Définition :
Une **inéquation à une inconnue x** est une inégalité de deux expressions littérales appelés les **membres** de l'inéquation.

Exemple : Soit l'inéquation : $x+3<5$

Cette inégalité est soit vraie, soit fausse, selon les valeurs de x.

Exemple :
Si x = 1, l'inéquation précédente est vraie. → 1 n'est pas solution de l'inéquation $x+3<5$
Si x = 6, l'inéquation précédente est fausse. → 6 est solution de l'inéquation $x+3<5$

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes ses solutions (toutes les valeurs possibles de *x* qui rendent l'inégalité vraie).

2) Inéquations du premier degré :

Définition :
Une inéquation est dite **du premier degré à une inconnue x** lorsqu'elle peut s'écrire sous l'une des formes :
$ax+b<cx+d$ $ax+b>cx+d$ $ax+b\leq cx+d$ $ax+b\geq cx+d$
(a, b, c, d, désignant des nombres avec $a\neq c$)

Po**ur résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue**, on isole x dans un membre à l'aide des propriétés suivantes :

Propriété 1 :
Si on ajoute ou on soustrait un même nombre aux deux membres d'une inéquation, alors on ne change pas le sens de l'inégalité et on obtient une nouvelle inéquation qui a les mêmes solutions que la première.

Exemple :

$x-4>8$	on retranche 6 aux deux membres
$x-4+4>8+4$	→ addition : le sens de l'inégalité ne change pas
$x>12$	→ Les solutions sont tous les nombres supérieurs à 12.

Exemple :

$x+6>11$	on retranche 6 aux deux membres
$x+6-6>11-6$	→ soustraction : le sens de l'inégalité ne change pas
$x>5$	→ Les solutions sont tous les nombres supérieurs à 5.

Propriété 2 :
- Si on multiplie ou on divise les deux membres d'une inéquation par un même nombre **strictement positif** (nombre positif non nul) alors **on ne change pas le sens de l'inégalité** et on obtient une nouvelle inéquation qui a les mêmes solutions que la première.

- Si on multiplie ou on divise les deux membres d'une inéquation par un même nombre **strictement négatif** (nombre négatif non nul) alors **on change le sens de l'inégalité** et on obtient une nouvelle inéquation qui a les mêmes solutions que la première.

Exemple :

$8x\leq 12$	on divise par +8 les deux membres
$\frac{8x}{8}\leq\frac{12}{8}$	→ le sens de l'inégalité ne change pas car +8 > 0.
$x\leq\frac{3}{2}$	Les solutions sont tous les nombres inférieurs ou égaux à $\frac{3}{2}$.

Exemple :

$$-2x \le 8$$ on divise par -2 les deux membres

$$\frac{-2x}{-2} \ge \frac{8}{-2}$$ → le sens de l'inégalité change car $-2 < 0$.

$$x \ge -4$$ Les solutions sont tous les nombres supérieurs ou égaux à -4

Exemples :

	$5 - x \ge \frac{7}{3}$	
$\frac{8}{3} + 3x \le \frac{x}{2} + 1$	1ère méthode	2ème méthode
$\frac{5}{2}x \le -\frac{5}{3}$	$-x \ge \frac{7}{3} - 5$	$5 - \frac{7}{3} \ge x$
$x \le -\frac{2}{3}$	$-x \ge -\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3} \ge x$
Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à $-\frac{2}{3}$	$x \le \frac{8}{3}$	$x \le \frac{8}{3}$
	Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à $\frac{8}{3}$	Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à $\frac{8}{3}$

3) Représentation des solutions sur une droite graduée :

Les solutions sont représentées en couleur, et le crochet aux bornes de l'espace solution est orienté vers la couleur si la borne fait partie des solutions, et est orienté de l'autre côté si la borne n'est pas admise.

Exemple :	Exemple :
$8x - 3 < 9 - 4x$ $8x + 4x < 9 + 3$ $12x < 12$ $x < 1$	$5 - 2x > 3(1 + x)$ $5 - 2x > 3 + 3x$ $-2x - 3x > 3 - 5$ $-5x > -2$ d'où $x < \frac{2}{5}$