Systèmes d'équations

I. Définition :

Exemple :

$2x + 1 = 3$ est une équation à une inconnue.
Résoudre l'équation, c'est trouver x pour que l'égalité soit vraie.
Cette équation a une solution unique $x=1$.

$2y + 4x = 8$ est une équation à 2 inconnues (x et y)
Résoudre l'équation, c'est trouver les valeurs de x et y pour que l'égalité soit vraie.

$$2y + 4x = 8$$
$$y + 2x = 4$$
$$y = -2x + 4$$

On reconnaît l'équation d'une droite. Tous les points de la droite ont des coordonnées qui sont solutions de l'équation. Exemple (1 ; 2) ou (-2 ; 8)…
Cette équation a une infinité de solutions.

$\begin{cases} 6y + 2x = 12 \\ -2y - 5x = 7 \end{cases}$ est un **système de 2 équations à 2 inconnues**.

Chaque équation correspond à une droite.
Si les droites ne sont pas parallèles, elles se coupent en un point dont les coordonnées sont solutions du système.

Un **système** est composé de deux équations qui contiennent chacune **les deux mêmes inconnues**.
On écrit ces deux équations l'une sous l'autre **en les associant à l'aide d'une accolade**.

Exemple : $\begin{cases} 3x + y = 45 \\ 6x + 5y = 126 \end{cases}$

Résoudre le système, c'est trouver toutes les solutions communes aux deux équations, c'est à dire trouver tous les couples (x ;y) pour lesquels les deux égalités sont vraies simultanément.
Le principe de résolution consiste à éliminer une inconnue pour se « ramener » à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue que l'on sait résoudre.

II. Méthodes de résolutions

1) Méthode par substitution :

Cette méthode est très efficace, quand l'une des inconnues est « toute seule », sans coefficient multiplicateur. On isole alors cette inconnue, et on la remplace dans l'autre équation, on substitue sa valeur obtenue dans la deuxième équation pour obtenir une équation ayant une seule variable.

Ex : $\begin{cases} y + 3x = 10 \\ 3y - 4x = -22 \end{cases}$ la variable y est « seule » dans la première équation, on l'exprime :

$$\begin{cases} y = 10 - 3x \\ 3\ \ 10 - 3x\ \ -4x = -22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10 - 3x \\ 30 - 9x - 4x = -22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10 - 3x \\ -13x = -22 - 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10 - 3x \\ \dfrac{-13x}{-13} = \dfrac{-52}{-13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10 - 3x \\ x = 4 \end{cases}$$

Quand on a trouvé une inconnue, on la remplace dans la première équation pour trouver l'autre :

$$\begin{cases} y = 10 - 3 \times 4 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

→ La solution du système est donc $S = \{4;-2\}$

2) Méthode par combinaison :

Ex : $\begin{cases} 3x + 2y = 1 & \times 2 \\ 2x + 5y = 19 & \times 3 \end{cases}$

On veut faire « disparaître » une inconnue. Ici par exemple on va éliminer la variable x.
On multiplie la 1ère équation par 2 et la 2ème par 3.

$$\begin{cases} (3x + 2y) \times 2 = 1 \times 2 \\ (2x + 5y) \times 3 = 19 \times 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 4y = 2 \\ 6x + 15y = 57 \end{cases}$$

Ainsi, on « a » $6x$ dans les 2 équations.
On garde la 1ère équation, et on soustrait la 2ème équation de la 1ère.

$$\begin{cases} 6x + 4y = 2 \\ 6x + 4y - (6x + 15y) = 2 - 57 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 4y = 2 \\ 6x + 4y - 6x - 15y = 2 - 57 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 4y = 2 \\ -11y = -55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 4y = 2 \\ y = \dfrac{-55}{-11} = 5 \end{cases}$$

Quand on a trouvé y on le remplace dans la 1ère équation pour trouver x :

$$\begin{cases} 6x + 4 \times 5 = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 20 = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x = 2 - 20 = -18 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-18}{6} = -3 \\ y = 5 \end{cases}$$

→ La solution du système est donc $S = \{-3;5\}$

3) Interprétation graphique

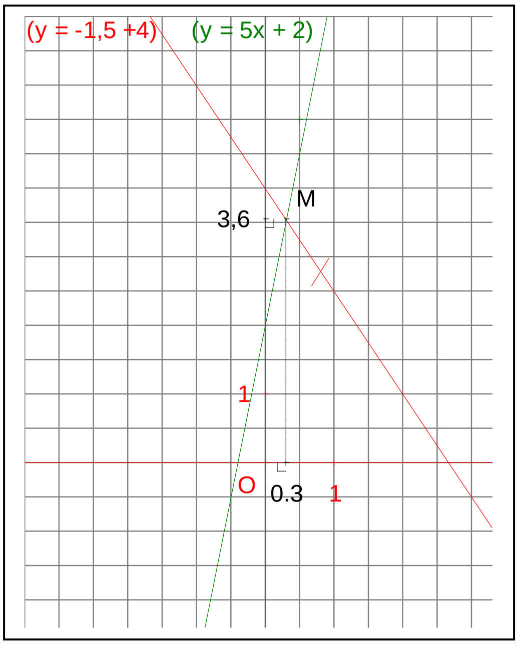
$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$ en exprimant y en fonction de x dans chacune des équations on obtient :

$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 4 \\ y = 5x + 2 \end{cases}$ cela correspond à deux applications affines.

Si l'on considère leurs représentations graphiques et la solution (x ; y) de ce système comme un point M (x ;y), M doit appartenir à la fois à la droite d'équation $y = -\frac{3}{2}x + 4$ et à la droite d'équation $y = 5x + 2$.

C'est donc le point d'intersection des deux droites.

On peut ainsi lire graphiquement une approximation de la solution du système.



Une solution approximative du système est (0,3 ; 3,6)

Résoudre le système : $\begin{cases} x+3y=10 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$

I. METHODE D'ELIMINATION PAR SUBSTITUTION :

Sur l'exemple :	Cas général :
1) Dans cet exemple, le coefficient de x dans la première équation est 1. On choisit pour plus de facilité d'exprimer x en fonction de y dans cette équation : x = –3y + 10	**1)** Exprimer, dans l'une des deux équations, une inconnue en fonction de l'autre. Parmi les quatre possibilités, on choisit celle qui rend les calculs plus simples
2) On remplace x par –3y + 10 dans la seconde équation. On écrit le nouveau système obtenu : $\begin{cases} x=-3y+10 \\ 3(-3y+10)+5y=18 \end{cases}$	**2)** Réécrire le système en remplaçant dans l'autre équation l'inconnue choisie, par l'expression obtenue à l'étape **1**. On obtient ainsi un système dont l'une des deux équations est une équation du premier degré à une inconnue. Il a les mêmes solutions que le système de départ.
3) On résout la seconde équation à une inconnue y : $\begin{cases} x=-3y+10 \\ -4y+30=18 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=-3y+10 \\ y=3 \end{cases}$	**3)** Résoudre l'équation du premier degré à une inconnue pour trouver la valeur de cette inconnue.
4) On reporte la valeur de y dans la première équation pour calculer x : $\begin{cases} x=-3\times3+10 \\ y=3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$	**4)** Remplacer cette inconnue par sa valeur trouvée à l'étape **3**, dans l'équation à deux inconnues et calculer la valeur de l'autre inconnue.
5) La solution du système : $\begin{cases} x+3y=10 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$ est le couple (1 ; 3).	**5)** Conclure : la solution du système donné au départ est le couple de nombres trouvés.

II. METHODE D'ELIMINATION PAR COMBINAISON :

Sur l'exemple :	Cas général :
1) Dans cet exemple, le coefficient de x dans la première équation est 1. On choisit pour plus de facilité d'éliminer x, on multiplie par –3 les deux membres de la première équation : -3x – 9y = -30.	**1)** Choisir l'inconnue que l'on veut éliminer. Multiplier les deux membres des deux équations par des nombres choisis de façon à obtenir des coefficients de cette inconnue opposés dans chacune des deux équations.
2) On additionne membre à membre les deux équations du système $\begin{cases} -3x-9y=-30 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$. On obtient l'équation –4y = -12. On écrit le nouveau système : $\begin{cases} -4y=-12 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$.	**2)** Ecrire le système dont les deux équations ont des coefficients opposés pour l'inconnue à éliminer et additionner membre à membre les deux équations de ce système. Ecrire un nouveau système, avec cette équation et l'une des deux équations de départ. On obtient ainsi un système dont l'une des équations est une équation du premier degré à une inconnue. Il a les mêmes solutions que le système de départ.
3) On résout la première équation à une inconnue y : $\begin{cases} y=3 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$	**3)** Résoudre l'équation du premier degré à une inconnue pour trouver la valeur de cette inconnue.
4) On reporte la valeur de y dans la première équation pour calculer x : $\begin{cases} y=3 \\ 3x+5\times3=18 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y=3 \\ x=1 \end{cases}$	**4)** Remplacer cette inconnue par sa valeur trouvée à l'étape **3**, dans l'équation à deux inconnues et calculer la valeur de l'autre inconnue.
5) La solution du système : $\begin{cases} x+3y=10 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$ est le couple (1 ; 3)	**5)** Conclure : la solution du système donné au départ est le couple de nombres trouvés.

III. INTERPRETATION GRAPHIQUE :

Soit le système : $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$

On exprime y en fonction de x dans chacune des équations on obtient :

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}x + 4 \\ y = 5x + 2 \end{cases}$$

cela correspond à deux applications affines.

Si l'on considère leurs représentations graphiques et la solution (x ; y) de ce système comme un point M (x ;y), M doit appartenir à la fois à la droite d'équation $y = -\dfrac{3}{2}x + 4$ et à la droite d'équation $y = 5x + 2$.

<u>C'est donc le point d'intersection des deux droites.</u>

On peut ainsi lire graphiquement une approximation de la solution du système.

Une solution <u>approximative</u> du système est (0,3 ; 3,6)