I. FONCTION LINÉAIRE :

Une fonction linéaire f de coefficient a est une fonction qui, à tout nombre *x*, associe le nombre a*x*.

On la note : $f : x \mapsto ax$
On dit que : $f(x)$ est l'image de x par la fonction f, et on écrit $f(x) = ax$.

Le nombre a est le **coefficient directeur (ou de linéarité)** de f .
Le nombre ax est **l'image de x par *f*** .

Exemple :
La fonction $f : x \mapsto -3x$ est la fonction linéaire de coefficient –3.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
f(x)	9	6	3	0	–3	–6	–9

Attention : f (–3) est l'image de –3 par f et non pas la multiplication de f par –3.

Remarque :
Toutes les fonctions linéaires traduisent des situations de proportionnalité.
A toute situation de proportionnalité, on peut associer une fonction linéaire.

→ Le tableau de valeurs ci-dessus est un tableau de proportionnalité, de coefficient –3.

II. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION LINÉAIRE :

Propriété :
La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine.

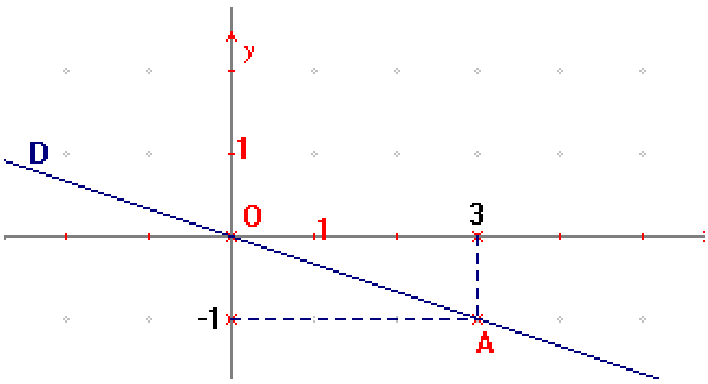
Etant donné un nombre a, la représentation graphique de la fonction linéaire $f : x \mapsto ax$ est une droite *D* d'équation : $y = ax$.

Exemple :
Soit la fonction linéaire $f : x \mapsto -\frac{1}{3}x$:

$f(3) = -\frac{1}{3} \times 3 = -1$, soit A(3 ; –1).

La droite D passe par O et par A.
D est la représentation graphique de la fonction linéaire f.

La droite D a pour équation $y = -\frac{1}{3}x$.



EXERCICES TYPES

Calcul d'image :

Calculer l'image de 2 par la fonction f définie par : $f(x) = 6x$.

$f(2) = 6 \times 2$ — *Je remplace x par 2 dans l'égalité f(x) = 6x.*
Je pense à ajouter le signe « × » s'il le faut !

$f(2) = 12$ — *Je fais le calcul.*

L'image de 2 par la fonction f est 12. — *Je conclus.*

Calcul d'antécédent :

Calculer l'antécédent de 2 par la fonction linéaire f définie par : $f(x) = 6x$.

On cherche le nombre x tel que $f(x) = 2$ — *Je traduis le problème à l'aide d'une équation.*

$6x = 2$ — *Je remplace f(x) par 6x.*

$x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ — *Je résous l'équation.*

$\frac{1}{3}$ est l'unique antécédent de 2 par f. — *Je conclus.*

Calcul de coefficient connaissant un antécédent et son image (donc un point de la droite) :

Calculer le coefficient de la fonction linéaire f définie par : $f(-3) = 4$. donc A(–3 ; 4)

f est une fonction linéaire donc elle peut s'écrire sous la forme : $f(x) = ax$ — *J'explicite l'écriture de la fonction f. J'introduis pour cela une lettre, par exemple la ici lettre a.*

On a : $f(-3) = a \times (-3) = 4$

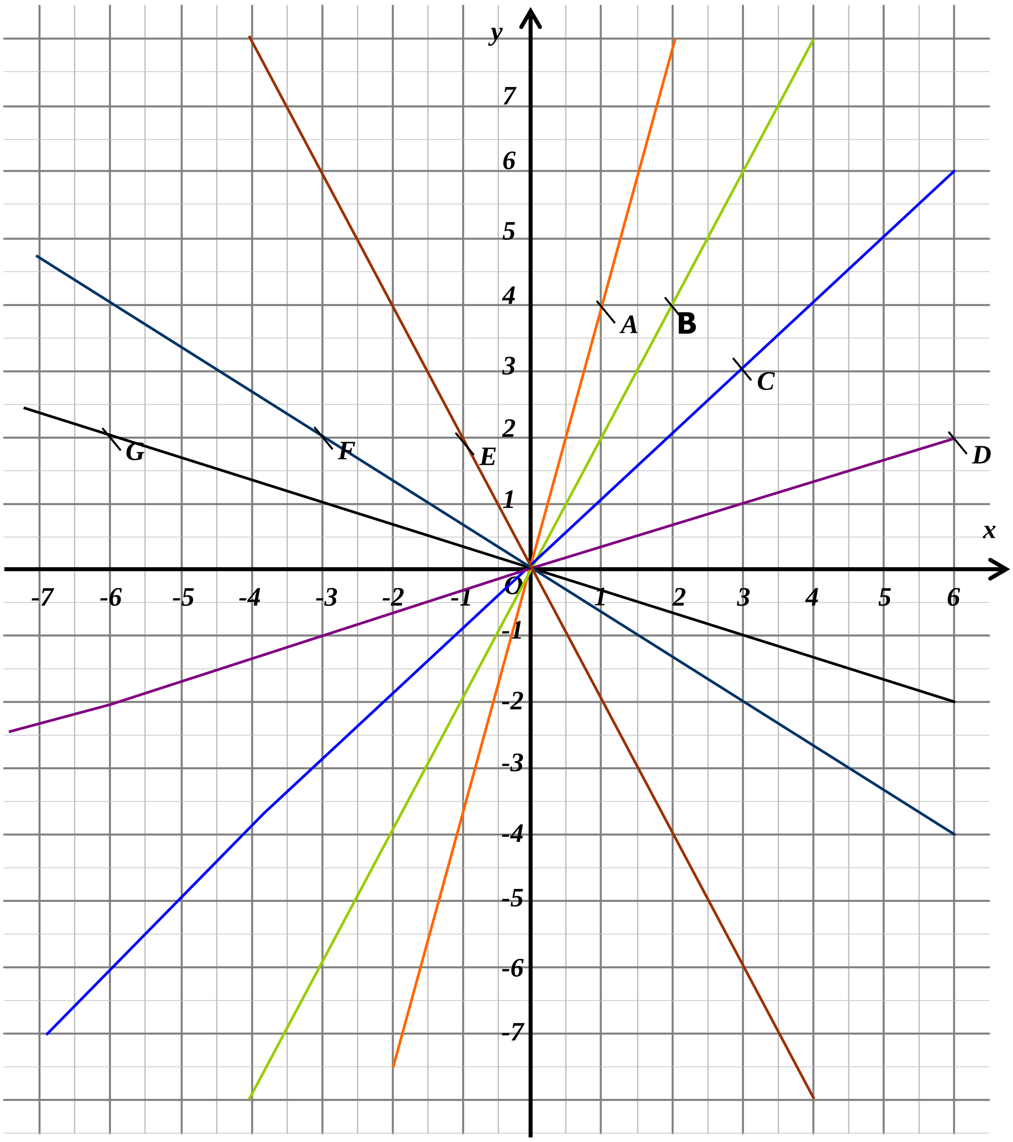
$a = \frac{4}{-3} = \frac{-4}{3}$ — *Je détermine a.*

Le coefficient de la fonction f est $\frac{-4}{3}$ *et* $f(x) = \frac{-4}{3}x$

Lectures graphiques de droites représentant des fonctions linéaires

Pour déterminer l'application linéaire associée à une droite passant par l'origine, il suffit de connaître les coordonnées d'un point de cette droite.

Exemple :



A a pour coordonnées (1 ; 4). Le coefficient de proportionnalité associée à la droite (OA) est donc :

$\frac{y_A}{x_A} = \frac{4}{1}$ soit $\frac{y_A}{x_A} = 4$. L'équation de cette droite est y = 4x.

En effet si $y = a \times x$ est l'équation de la droite (OA), A étant un point de la droite, ses coordonnées vérifie l'équation de la droite, donc $y_A = a \times x_A$, ce qui donne $a = \frac{y_A}{x_A}$ et ceci est valable pour tout point de (OA).

4 est appelé le **coefficient directeur** ou **la pente** de la droite (OA).

Droite	Point	Coefficient directeur	Application linéaire associée
(OB)	B : (2 ; 4)	$4 \div 2 = 2$	**y = 2x**
(OC)	C : (3 ; 3)	$3 \div 3 = 1$	**y = x**
(OD)	D : (6 ; 2)	$2 \div 6 = \frac{1}{3}$	**y = $\frac{1}{3}$ x**
(OE)	E : (-1 ; 2)	$2 \div (-1) = -2$	**y = -2 x**
(OF)	F : (-3 ; 2)	$2 \div (-3) = -\frac{2}{3}$	**y = -$\frac{2}{3}$ x**

(OG)	G : (-6 ; 2)	$2 \div (-6) = -\frac{1}{3}$	$\mathbf{y = -\frac{1}{3}x}$

II. FONCTION AFFINE :

➔ Etant donné deux nombres a et b, on définit une **fonction affine** *f* lorsque, à tout nombre x, on associe le nombre ax + b.
Les nombres a et b sont les **coefficients** de *f* .
Le nombre ax + b est **l'image de x par *f*** .

On note : $f : x \mapsto ax+b$ la fonction de coefficients a et b ;
$f(x)$ l'image de x par la fonction *f*, et on écrit $f(x) = ax+b$.

Propriété :

Etant donné deux nombres a et b, la représentation graphique de la fonction linéaire $f : x \mapsto ax+b$ est une droite *D* parallèle à la représentation graphique de la fonction linéaire $g : x \mapsto ax$. Une équation de cette droite *D* est $y = ax+b$.
D passe par le point B(0 ; b), et b est appelé **l'ordonnée à l'origine** de *f*.
Le coefficient de linéarité a de la fonction affine *f* est le **coefficient directeur** de la droite *D*.
On dit que *g* est **la fonction linéaire associée** à *f*.

Remarque :

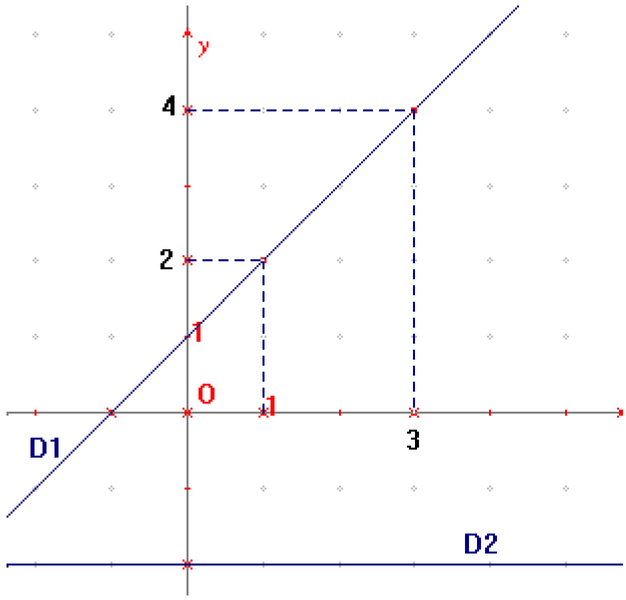
Une fonction linéaire est une fonction affine particulière car $f : x \mapsto ax$ peut aussi s'écrire $f : x \mapsto ax+0$.
Lorsque a = 0,la fonction affine f est définie par $f(x) = b$; c'est une fonction constante dont la représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemples :

1. La représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto x+1$ est la droite D_1 d'équation $y=x+1$.

   On lit sur la représentation graphique que :
   - l'image de 1 par f est 2
   - et que le nombre dont l'image par f est 4 est 3.

2. La représentation graphique de la fonction affine $g : x \mapsto -2$ est la droite D_2 d'équation $y=-2$.



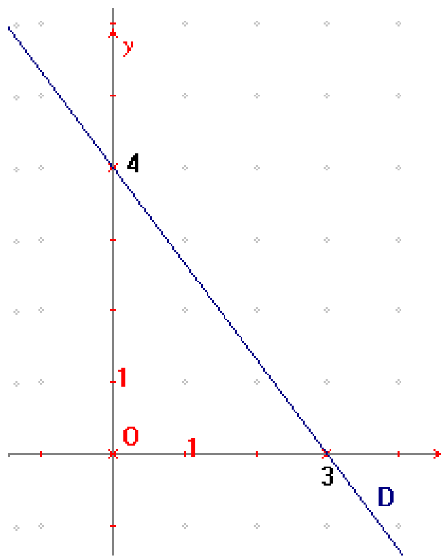
Propriété :

Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine. Elle a une équation de la forme $y = ax+b$.

Exemple :

D est la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto -\frac{4}{3}x+4$;

elle a pour équation $y=-\frac{4}{3}x+4$.



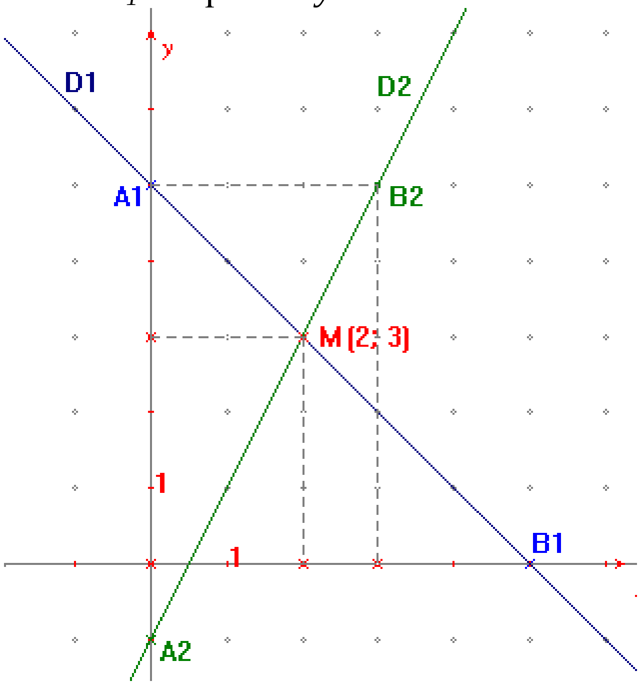
III. RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'UN SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES :

On veut résoudre le système de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=1 \end{cases}$.

En exprimant y en fonction de x dans les deux équations, on obtient un nouveau système qui a les mêmes solutions que le système de départ : $\begin{cases} y=-x+5 \\ y=2x-1 \end{cases}$

Résoudre le système revient donc à déterminer le point d'intersection des droites :

- D_1 d'équation $y=-x+5$
- et D_1 d'équation $y=2x-1$.



- La fonction $x \mapsto -x+5$ a pour représentation graphique la droite D_1 d'équation $y=-x+5$
- La fonction $x \mapsto 2x-1$ a pour représentation graphique la droite D_2 d'équation $y=2x-1$

La lecture graphique fournit les coordonnées de ce point : M(2 ; 3)
On peut vérifier par le calcul que le couple (2 ; 3) est la solution du système.

Remarque :

Cette méthode de résolution ne doit pas être utilisée dans un exercice que si cela est explicitement demandé dans les consignes. En effet, elle nécessite des tracés très précis et n'est pas toujours applicable.